

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală: 21 februarie 2016

Filiera teoretică: profilul științele naturii

Barem orientativ

Clasa a IX-a

1. a) Demonstrați că $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, oricare ar fi numărul natural $n > 1$.

- b) Determinați partea întreagă a numărului $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2016^2}$.

Soluție: a) Dem prin calcul direct.....2p (câte un punct pentru fiecare inegalitate)

b) Rescrierea relației de la a) pentru toate valorile lui n de la 2 la 2016.....1p

Însumarea lor și obținerea relației

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} < S < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} \dots 1p$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \dots 1p$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2017} < S < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2016} \dots 1p$$

$$[S] = 1 \dots 1p$$

2. Se consideră mulțimea fracțiilor de forma $\frac{2x+7}{2x-3}$, $x \geq 1$, x număr natural, și $(x_n)_n$ șirul valorilor lui x pentru care fracția de mai sus este reductibilă.

- a) Determinați x_{1000} ;

- b) Calculați $x_m + x_n - x_{m+n}$, unde m, n sunt numere naturale nenule.

Soluție: a) Frație reductibilă $\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N}$ astfel ca $d/2x+7$ și $d/2x-3 \Rightarrow d/10d \Rightarrow d \in \{1, 2, 5, 10\}$1p

$$2x+7 \text{ impar deci } d=5 \Rightarrow 2x+7 = \mathcal{M}_5 \Rightarrow x_1 = 4 \dots 1p$$

$$x_{1000} = 4 + 999 \cdot 5 = 3999 \dots 1p$$

$$b) x_m = 4 + 5(m-1), x_n = 4 + 5(n-1), x_{m+n} = 4 + 5(m+n-1) \dots 3p$$

$$x_m + x_n - x_{m+n} = -1 \dots 1p$$

3. În clasa a IX-a elevii studiază opțional una dintre disciplinele franceză, engleză și germană. Se știe ca 18 nu studiază franceză, 25 nu studiază germană și 17 nu studiază engleză. Câți elevi sunt înscriși la fiecare disciplină opțională?

Soluție: 18 elevi studiază engleză și germană, 25 elevi studiază engleză și franceză, 13 elevi studiază franceză și germană.....3p

În clasa sunt 30 de elevi.....2p

12 elevi studiază franceză, 5 germană și 13 engleză.....2p

4. Fie ABCD un paralelogram și punctele E, F astfel ca $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BE}$ și $\overrightarrow{FD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FA}$.

- a) Demonstrați că C, E, F sunt coliniare;

- b) Dacă A' este simetricul lui A față de E, atunci $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}$.

Soluție: a) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$, deci F, E, C sunt coliniare.....3p

$$b) \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CA} \dots 4p$$